
HET POINCARÉVERMOEDEN IN DIMENSIE 2

ERIK VISSE

Aan het begin van de eeuw bewees Grigori Perelman het Poincarévermoeden uit 1904 en loste daarmee het eerste milleniumprobleem op. Het Poincarévermoeden geeft criteria waarmee men kan controleren of een topologische ruimte homeomorf is aan een n -sfeer. Tegenwoordig weten we dat het vermoeden correct is voor alle natuurlijke getallen n . Perelmans bewijs was voor $n = 3$, het op dat moment enige nog openstaande geval. Hier wordt een bewijs gegeven voor het geval $n = 2$. Hiervoor is een klein beetje voorkennis van topologie handig, maar als men bereid is termen zoals ‘compact’ of ‘enkelvoudig samenhangend’ te negeren, dan is de kern van het bewijs prima te volgen. Mocht de student deze termen willen begrijpen zonder een college topologie te volgen, dan zijn de docenten natuurlijk bereid om ze waar nodig toe te lichten.

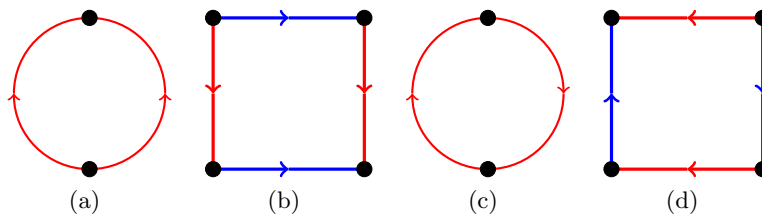
DEFINITIE 1.1. Een *oppervlak* is een topologische ruimte waarbij

1. ieder punt een omgeving homeomorf aan de tweedimensionale Euclidische ruimte \mathbb{R}^2 heeft, en
2. verschillende punten disjuncte omgevingen hebben.

Voor wie wat meer voorkennis heeft: een oppervlak is een topologische 2-variëteit.

VOORBEELD 1.2. De volgende verzamelingen met hun standaardtopologieën zijn oppervlakken:

- (a) de 2-sfeer S^2 ;
- (b) de torus van genus g , genoteerd met $g\mathbb{T}^2$, de sfeer met g ‘handvatten’ eraan geplakt;
- (c) $n\mathbb{P}^2$, de sfeer waaruit n disjuncte schijven zijn vervangen door een Möbiusband;
- (d) de fles van Klein, het speciale geval van (c) met $n = 2$. Van deze oppervlakken is in figuur 1 een representatie gegeven waarbij zijden met dezelfde kleur in de aangegeven richting aan elkaar geplakt moeten worden.



Figuur 1: Een representatie voor de genoemde oppervlakken. De aangegeven zijden worden geïdentificeerd volgens de quotiënttopologie. Voor (b) en (c) hebben we het geval met $n = 1$ weergegeven.

Merk op dat in de definitie zit opgenomen dat een oppervlak geen rand heeft. Voor een oppervlak met rand vervangt men punt 1 door “ieder punt heeft een omgeving homeomorf aan \mathbb{R}^2 of aan het halfvlak $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0\}$ ”.

STELLING 1.3 (Poincarévermoeden voor dimensie 2). *Zij \mathcal{S} een compact, enkelvoudig samenhangend oppervlak. Dan is \mathcal{S} homeomorf aan de sfeer S^2 .*

Het bewijs van deze stelling baseren we op de volgende, eind-19^e-eeuwse stelling.

STELLING 1.4 (Classificatiestelling). *Zij \mathcal{S} een compact en samenhangend oppervlak. Dan zijn er drie mogelijkheden:*

1. *\mathcal{S} is homeomorf aan S^2 ;*
2. *\mathcal{S} is homeomorf aan $n\mathbb{T}^2$ voor een zekere $n \in \mathbb{Z}_{>0}$;*
3. *\mathcal{S} is homeomorf aan $n\mathbb{P}^2$ voor een zekere $n \in \mathbb{Z}_{>0}$.*

Het bewijs van Stelling 1.3 is nu heel eenvoudig:

Bewijs Stelling 1.3. Dit volgt direct doordat de fundamentealgroepen niet triviaal zijn, maar $\pi_1(n\mathbb{T}^2) \cong \mathbb{Z}^{2n}$ en $\pi_1(n\mathbb{P}^2) \cong C_2 \times \mathbb{Z}^{n-1}$ [1,p.169]. De enige enkelvoudig samenhangende mogelijkheid is dus S^2 . \square

Voor het bewijs van Stelling 1.4 hebben we het begrip triangulatie nodig en een tweetal lemma's die hiermee gemoeid zijn. De bewijzen hiervan laten we achterwege. Ze kunnen gevonden worden in [3] als Stellingen 4.12 en 4.13.

DEFINITIE 1.5. Een *triangulatie* van een oppervlak \mathcal{S} is een eindige overdekking met driehoeken van \mathcal{S} zodanig dat twee verschillende driehoeken elkaar in 0 of 1 zijde raken. Als ze elkaar raken in een zijde, dan vallen deze zijdes geheel samen.

LEMMA 1.6. *Zij \mathcal{S} een compact oppervlak. Dan is er een triangulatie van \mathcal{S} mogelijk.*

LEMMA 1.7. *Is \mathcal{S} samenhangend, dan zijn de driehoeken zo te ordenen dat we een lijst $(1, 2, 3, \dots, n)$ kunnen maken waarbij voor alle $i \in \{2, 3, \dots, n\}$ driehoek i een zijde gelijk heeft met driehoek $i - 1$.*

Merk op dat - omdat onze oppervlakken geen rand hebben - iedere gebruikte driehoek in al zijn zijdes aan een andere driehoek grenst.

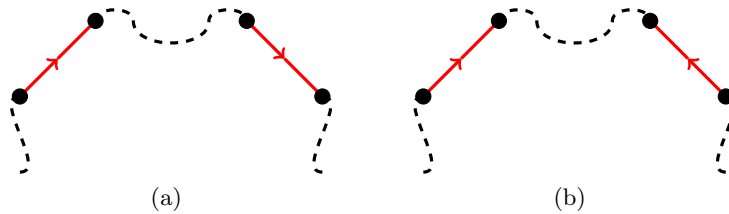
Hiermee hebben we voldoende gereedschap om de Classificatiestelling te bewijzen. Het gegeven bewijs is ook te vinden in [2, sectie 21]. Een vergelijkbaar bewijs is te vinden in [1, hoofdstuk 7].

Bewijs van stelling 1.4. Zij \mathcal{S} een compact en samenhangend oppervlak. Wegens Lemma 1.6 is er een triangulatie mogelijk. Laat dus een triangulatie gegeven zijn met de in Lemma 1.7 genoemde ordening. We maken een vlakke representatie van \mathcal{S} als volgt. Beeld driehoek 1 af op een driehoek in het platte vlak. Beeld driehoek 2 af op een driehoek in het platte vlak die aan het beeld van driehoek 1 grenst. Beeld driehoek i af op een driehoek die aan het beeld grenst van driehoek $i - 1$ maar niet aan de beelden van eerdere driehoeken. Ga zo door tot men alle driehoeken uit de triangulatie gehad heeft. We knippen \mathcal{S} als het ware open en vouwen het uit. Vervolgens identificeren we zijdes in de representatie paarsgewijs wanneer hun originelen in de triangulatie gelijk zijn. Zolang we bijhorende zijdes blijven identificeren mogen we naar hartelust knippen en plakken in de representatie omdat dit \mathcal{S}

zelf niet aantast; we hebben dus geen last van het feit dat knippen en plakken geen continue bewerkingen zijn.

Met deze representatie zullen we nu algoritmisch te werk gaan om \mathcal{S} te classificeren. We bekijken in de representatie alleen de zijdes aan de buitenkant. Een buitenkant bestaat omdat we slechts met een eindig aantal driehoeken werken. Voor een geïdentificeerd paar zijdes hebben we twee mogelijkheden, welke we nu beide een naam zullen geven. De mogelijkheden ontstaan door het feit dat de identificatie een oriëntatie met zich meebrengt.

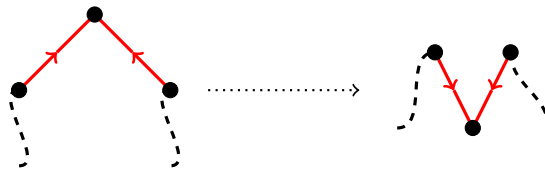
DEFINITIE 1.8. Een *gedraaid paar* is een paar zijdes in de representatie die, als we de buitenrand van de representatie rondlopen, in dezelfde richting geïoriënteerd zijn. Een *gekruist paar* is een paar zijdes in de representatie die, als we de buitenrand van de representatie rondlopen, in onderling verschillende richting geïoriënteerd zijn. Zie figuur 2.



Figuur 2: (a) Een gedraaid paar en (b) een gekruist paar.

Stap I is het elimineren van aangrenzende gekruiste paren. Dit doen we door zo'n paar als het ware naar binnen te vouwen en het paar zijdes aan elkaar te plakken, zie figuur 3 voor een visuele presentatie. Deze stap zal in het vervolg na iedere actie herhaald worden.

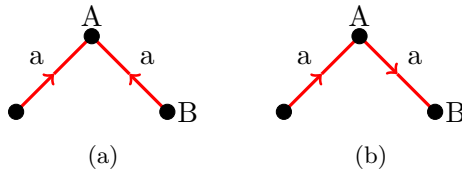
Merk op dat het mogelijk is dat we alleen maar aangrenzende gekruiste paren hebben. In dat geval elimineren we het laatste niet en vinden we de representatie van S^2 .



Figuur 3: Deze figuur beeldt stap I uit het algoritme uit.

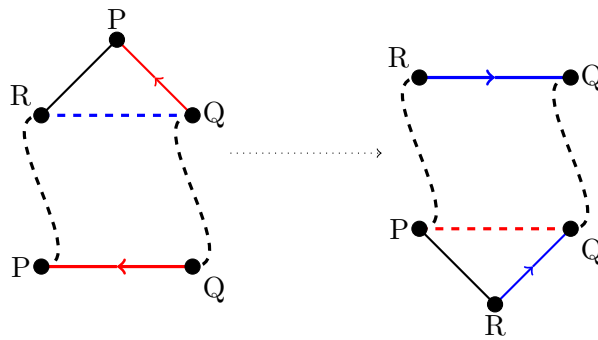
In stap II geven we alle hoekpunten in de representatie een naam, waarbij geïdentificeerde hoekpunten natuurlijk dezelfde naam krijgen. Merk op dat de twee situaties afgebeeld in figuur 4 met $A \neq B$ niet kunnen voorkomen. De eerste niet wegens stap I en de tweede niet omdat dan $A = B$ zou gelden.

Vervolgens kiezen we een 'hoofdhoekpunt' R en passen we –als er nog verschillende hoekpunten zijn– de volgende techniek toe die het best weergegeven wordt door figuur 5. We kiezen een pad van R naar Q in het binnenste van de representatie en knippen de representatie door langs dit pad. De losgekomen driehoek plakken



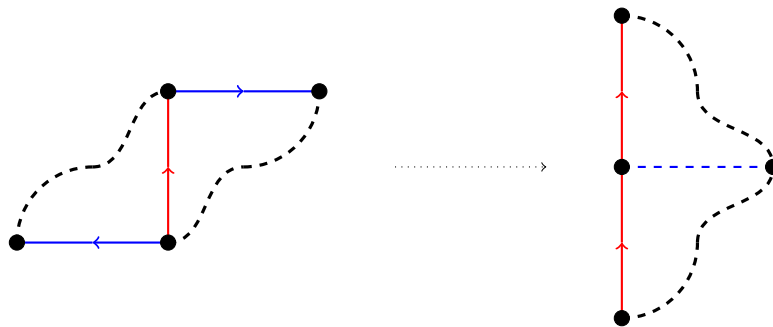
Figuur 4: De figuur geeft de hierboven genoemde onmogelijke situaties weer.

we vervolgens op een handige manier weer aan de representatie vast. Merk op dat we via deze weg een hoekpunt R meer hebben gekregen ten koste van een hoekpunt P . Dit terwijl het totaal aantal hoekpunten gelijk is gebleven. Door iteratie kunnen we zo alle hoekpunten vervangen door hoekpunt R . Om te voorkomen dat in een gekozen pad andere hoekpunten dan R liggen, vatten we dit pad op als enkele zijde. Hierdoor ontnemen we onszelf de mogelijkheid ergens in het pad te knippen, maar het blijkt dat we hier zonder kunnen.



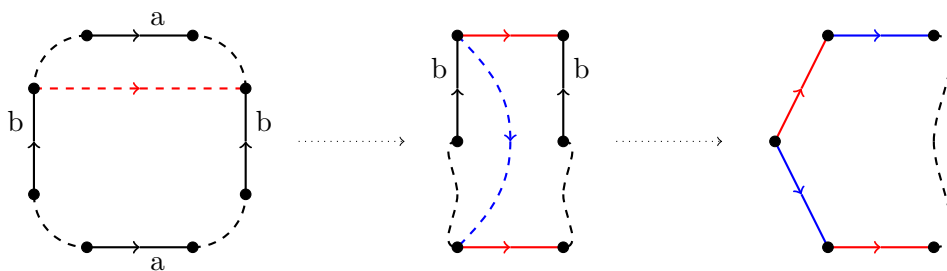
Figuur 5: Met het hier afgebeelde proces kunnen we ervoor zorgen dat we slechts één hoekpunt in de representatie hebben.

Stap III noemen we normalisatie van gedraaide paren. Het houdt in dat we, zo die er is, een niet-aangrenzend gedraaid paar nemen en die omvormen tot een aangrenzend gedraaid paar. De manier waarop is aangegeven in figuur 6. Mogelijk zijn we na deze stap klaar. We hebben in dat geval alleen aangrenzende, gedraaide paren en daarmee de representatie van $n\mathbb{P}^2$ voor n het aantal paren zijdes.



Figuur 6: Door weer slim knippen en plakken kunnen we gedraaide paren normaliseren.

Voor stap IV, normalisatie van gekruiste paren, hebben we een extra inzicht nodig. Laat een willekeurig gekruist paar, zo die er is, gegeven zijn. De andere zijdes liggen nu in twee takken. Stel nu dat er geen scheidend gekruist paar is, dat wil zeggen dat er geen gekruist paar is waarvan de één in de ene tak ligt en de ander in de andere tak. Dan zijn wegens stap I en de aanname beide takken niet leeg en volgt uit stap III dat iedere tak alleen gehele paren bevat. Daarmee is er geen ‘recept’ om de ene tak ergens aan de andere te plakken. Maar dan zijn de hoekpunten in de ene tak verschillend van de hoekpunten in de andere tak, hetgeen ongerijmd is met stap II. Er volgt dat er altijd een scheidend gekruist paar is. In het bijzonder komen gekruiste paren dus in tweetallen voor. Voer nu weer het nodige knip- en plakwerk uit om twee gekruiste paren in de eindvorm van figuur 7 te brengen.



Figuur 7: Met twee keer knippen en plakken vinden we de afgebeelde representatie.

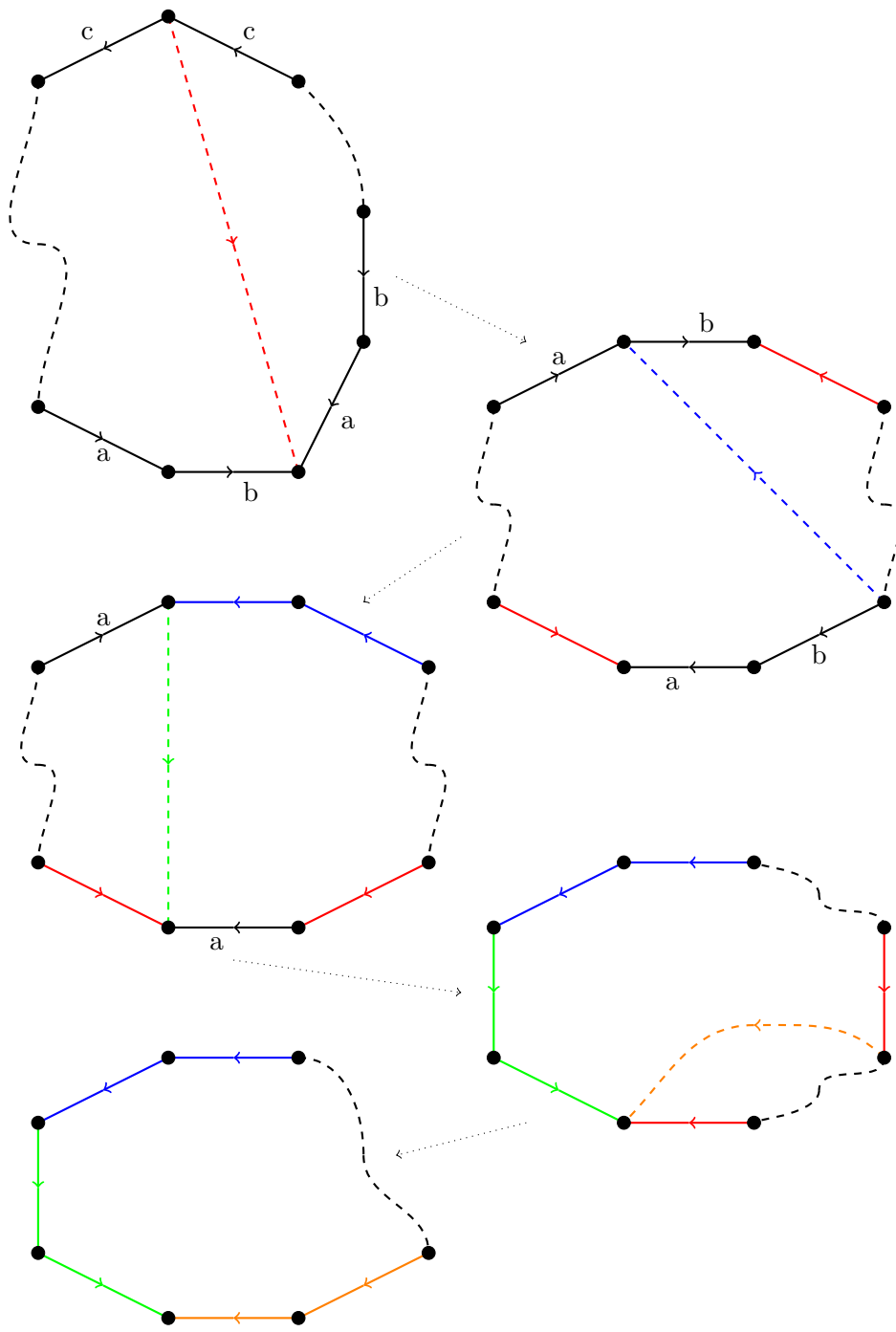
Als we na deze stap klaar zijn, dan hebben we de representatie van $n\mathbb{T}^2$ gevonden waarbij $2n$ het aantal gekruiste paren is.

Als we nog niet klaar zijn, dan hebben we nog één stap te gaan. We hebben nu een aantal aangrenzende gedraaide paren en een even aantal paarsgewijs verwikkelde gekruiste paren (i.e. zoals aan het eind van stap IV). Stap V bestaat nu uit viermaal knippen en plakken om weer de representatie te vinden van $n\mathbb{P}^2$. Zie figuur 8.

We hebben hiermee alle mogelijkheden behandeld en slechts de in de stelling genoemde oppervlakken gevonden. Dit sluit het bewijs. \square

REFERENTIES

- [1] Armstrong, M.A., *Basic Topology*, 1983, Springer Undergraduate Texts in Mathematics, Springer-Verlag, New York (origineel 1979 McGraw-Hill Book Company, Maidenhead)
- [2] Henle, M., *A Combinatorial Introduction to Topology*, 1994, Dover Publications, Mineola (origineel 1979 W.H. Freeman & Company, San Fransisco)
- [3] Kinsey, L.C., *Topology of surfaces*, 1997, 2^e editie, Springer Undergraduate Texts in Mathematics, Springer-Verlag, New York



Figuur 8: Deze laatste stap is nodig om alle gevallen behandeld te hebben.