Het vermoeden van Poincaré

Henri Poincaré vroeg zich iets meer dan honderd jaar geleden af welke eigenschappen van een sfeer voldoende waren om de sfeer te definiëren. In het bijzonder vroeg hij zich dit af voor een 3-sfeer, dus de verzameling $\{x \in \mathbb{R}^4 : |x| = 1\}$, ofwel de rand van een vierdimensionale bol. Hoewel hij eerst iets vermoedde dat er dicht in de buurt zat, wist hij zelf een tegenvoorbeeld te geven. Het vermoeden dat een compacte variëteit (Engels: manifold) zonder rand die *homotopie-equivalent* is met een sfeer ook homeomorf is met een sfeer is de geschiedenis in gegaan als het Poincaré vermoeden. Hierop kon hij namelijk zelf geen tegenvoorbeeld geven. Ook is het tot kort geleden niet gelukt om het te bewijzen. Sinds het bewijs uit 2004 van Grigori Perelman weten we dat het vermoeden positief beantwoord kan worden. Dit bewijs was voor het originele vermoeden voor dimensie 3, dat veel lastiger bleek dan alle lagere of hogere dimensies.

Het bewijs voor het Poincaré vermoeden in dimensie 2, waar homotopie-equivalentie met een sfeer niets anders is dan enkelvoudige samenhangendheid, ofwel het kunnen samentrekken van alle mogelijke lussen op het oppervlak, is met wat klassieke topologie en/of combinatoriek te leveren.

Met enige voorkennis van topologie is het bewijs uit het materiaal prima te begrijpen. Zelfs zonder goede kennis van topolgie zijn de mooie ideeën ook prima te volgen. Voor een voordracht bij LPC is het wellicht verstandig om de nodige lemma's aan te nemen zonder bewijs. Het betreft hier wel een lastig onderwerp, hetgeen natuurlijk juist als een uitdaging gezien kan worden.