Syllabus Maat- en Integratietheorie

prof.dr. S.M. Verduyn Lunel
dr. S.C. Hille

Najaarssemester, collegejaar 2006-2007

Hoofdstuk 2

Maattheorie

De wens om algemene deelverzamelingen $E \subset \mathbb{R}^n$ te kunnen 'meten' komt voort uit de toepassingen. Intuïtief zou een 'maat' de grootte van een verzameling moeten geven. Het zou dus een afbeelding $\mu : \mathcal{P}(X) \to [0, \infty]$ moeten zijn. Denk bijvoorbeeld aan de functie $\mu : \mathcal{P}(\mathbb{R}^n) \to [0, \infty]$ met de eigenschap $\mu(E)$ is de massa van E of het n-dimensionaal volume, of denk aan de functie $\mu : \mathcal{P}(\mathbb{R}^n) \to [0, \infty]$ met de eigenschap dat $\mu(E)$ de kans is dat de uitkomst van een experiment in E ligt.

2.1 Een (onmogelijke) intuïtieve opzet

Intuïtief zou je de volgende eigenschappen verwachten voor de 'maat'-afbeelding $\mu : \mathcal{P}(\mathbb{R}^n) \to [0, \infty]$:

(E1) (*Lege verzameling heeft geen grootte*) $\mu(\emptyset) = 0$.

(E2) (*Toelaten van aftelbare benaderingsmethode*) Als $E_1, E_2, \ldots$ paarsgewijs disjunct zijn, dan

$$\mu\Big(\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k\Big) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu(E_k).$$

(E3) (*Invariantie onder rotatie en transalatie*) Als E congruent[1] met F is, dan is $\mu(E) = \mu(F)$.

(E4) (*Normalisatie*) Als Q de (halfopen) n-dimensionale eenheidskubus,

$$Q = \{x \in \mathbb{R}^n \mid 0 \le x_j < 1, j = 1, 2, 3, \ldots, n\}$$

dan is $\mu(Q) = 1$.

De intuïtie legt het hier echter af tegen de logica - onder aanname van het keuze-axioma.

Proposition 2.1.1 *Onder de aanname van het keuze-axioma bestaat er geen afbeelding $\mu : \mathcal{P}(\mathbb{R}^n) \to [0, \infty]$ met de eigenschappen (E1) tot en met (E4).*

[1]Twee verzamelingen in $\mathbb{R}^n$ heten congruent wanneer zij door middel van een samenstelling van translaties en rotaties in $\mathbb{R}^n$ in elkaar kunnen worden getransformeerd.

Bewijs. We beperken ons tot het geval $n = 1$. Het idee van het bewijs is om de eenheidskubus $Q = [0,1)$ op te delen in aftelbaar veel paarsgewijs disjuncte verzamelingen, ieder met maat gelijk aan die van Q, i.e. maat 1. Eigenschap (E2) geeft dan een tegenspraak.

Beschouw de volgende equivalentierelatie op $\mathbb{R}$:

$$x \sim y \Leftrightarrow x - y \in \mathbb{Q}.$$

Volgens het Keuzeaxioma bestaat er een verzameling $C \subset [0,1)$ zodat C precies één element bezit van iedere equivalentieklasse $E[x]$, $x \in \mathbb{R}$. Laat $R = \mathbb{Q} \cap [0,1)$ en definieer voor iedere $r \in R$

$$C_r := \{x + r \mid x \in C \cap [0, 1-r)\} \cup \{x + r - 1 \mid x \in C \cap [1-r, 1)\}. \quad (2.1)$$

Merk op, dat de eerste verzameling aan de rechterkant in (2.1) bevat is in $[r,1)$, terwijl de tweede bevat is in $[0,r)$. Dus $C_r \subset [0,1)$ en elke $x \in [0,1)$ behoort precies tot één C_r. Immers, als $x \in [0,1)$, dan bestaat er een unieke $y \in C$ zodat $y \in E[x]$. Dus $x - y \in \mathbb{Q}$. Definieer nu

$$r := \begin{cases} x - y & \text{als } y \leq x \\ x - y + 1 & \text{als } y \geq x. \end{cases}$$

Omdat $x, y \in [0,1)$, is $r \in R := \mathbb{Q} \cap [0,1)$ en $x \in C_r$. Dus $C = \cup_{r \in R} C_r$.

De verzamelingen C_r zijn paarsgewijs disjunct. Stel er bestaan een $r, s \in R$ met $s \neq r$ en $x \in C_r \cap C_s$. Dan geldt, dat

$$x - r \text{ of } x - r + 1 \quad \text{en} \quad x - s \text{ of } x - s + 1$$

verschillende elementen van C zijn, die tot dezelfde equivalentieklasse behoren. En dit is een tegenspraak.

Stel nu, dat er een functie $\mu : \mathcal{P}(\mathbb{R}) \to [0, \infty]$ bestaat met de eigenschappen (E1)-(E4). Door achtereenvolgens gebruik te maken van eigenschap (E2), (E3) en wederom (E2) volgt, dat

$$\begin{aligned} \mu(C) &= \mu\big(C \cap [0, 1-r) \;\cup\; C \cap [1-r, 1)\big) \\ &= \mu\big(C \cap [0,1-r)\big) + \mu\big(C \cap [1-r,1)\big) \\ &= \mu\big(r + C \cap [0,1-r)\big) + \mu\big(r - 1 + C \cap [1-r,1)\big) \\ &= \mu(C_r). \end{aligned}$$

Aangezien R aftelbaar is, volgt nu uit (E2) en (E4), dat

$$1 = \mu([0,1)) = \sum_{r \in R} \mu(C_r) = \sum_{r \in R} \mu(C),$$

maar dit is een tegenspraak. □

Opmerking 2.1.1 Algemener geldt de stelling van Banach en Tarski. Voor ieder paar $U, V \subset \mathbb{R}^n$ $(n \geq 3)$ bestaan er paarsgewijs disjuncte deelverzamelingen $E_1, E_2, \ldots, E_k$ met $\cup_{j=1}^k E_j = U$ en paarsgewijs disjuncte deelverzamelingen $F_1, F_2, \ldots, F_k$ met $\cup_{j=1}^k F_j = V$ zodat E_j congruent is met F_j voor $j = 1, 2, 3, \ldots$,k.

Conclusie. Met is niet mogelijk om de maat (in de zin van n-dimensionaal volume) van een willekeurige deelverzameling van $\mathbb{R}^n$ te definiëren. De collectie 'meetbare verzamelingen' moet een echte deelverzameling van $\mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ zijn.

2.2 Algebra's en σ-algebra's

Herinner, dat in de Topologie een collectie van deelverzameling van een verzameling X, namelijk de collectie open deelverzamelingen ofwel de topologie op X, een fundamenteel concept is. Vergelijkbaar is voor Maattheorie een collectie deelverzamelingen van een verzameling, een *σ-algebra van meetbare deelverzamelingen*, van fundamenteel belang.

Laat $X \neq \emptyset$.

Definitie 2.2.1 *Een niet-lege deelverzameling $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X)$ heet een* **algebra** *als*

(i) $E \in \mathcal{A}$ impliceert dat $E^c \in \mathcal{A}$, en
(ii) $E_1, \ldots E_n \in \mathcal{A}$ impliceert dat $\cup_{j=1}^n E_j \in \mathcal{A}$.

Uit (*i*) en (*ii*) volgt dat $X = E \cup E^c \in \mathcal{A}$ en daarmee ook $\emptyset = X^c \in \mathcal{A}$.

Definitie 2.2.2 *Een algebra $\mathcal{A}$ heet een* **σ-algebra** *als $\mathcal{A}$ bovendien gesloten is onder aftelbare verenigingen, i.e. in plaats van (ii) geldt algemener*

(ii') $E_j \in \mathcal{A}$, $j \in \mathbb{N}$, impliceert dat $\cup_{j=1}^\infty E_j \in \mathcal{A}$.

Merk op, dat uit (*ii*) en (*ii'*) en een van de Wetten van DeMorgan volgt, dat een algebra respectievelijk een σ-algebra gesloten is onder eindige respectievelijk aftelbare doorsneden. Immers, als $E_j \in \mathcal{A}$, dan

$$\bigcap_j E_j = \big(\bigcup_j E_j^c\big)^c \in \mathcal{A}.$$

Definitie 2.2.3 *Een paar $(X, \mathcal{M})$ met $\mathcal{M} \subset \mathcal{P}(X)$ een σ-algebra heet een* **meetbare ruimte**. *De verzamelingen in $\mathcal{M}$ heten* **meetbaar**.

We zullen in het vervolg de letter $\mathcal{A}$ zoveel mogelijk reserveren voor een algebra in $\mathcal{P}(X)$, terwijl we $\mathcal{M}$ (van 'meetbaar') gebruiken voor een σ-algebra.

Voorbeeld 2.2.1 1.) $\{\emptyset, X\}$ en $\mathcal{P}(X)$ zijn σ-algebra's in X.
2.) Een minder triviaal voorbeeld van een σ-algebra in een *overaftelbare* verzameling X (i.e. $\mathrm{card}(X) \geq \aleph_1$) is

$$\mathcal{M} := \{E \subset X | E \text{ is aftelbaar of } E^c \text{ is aftelbaar}\}.$$

Lemma 2.2.1 *Als $\mathcal{M}$ een σ-algebra is en $E = \cup_{j=1}^\infty E_j$ met $E_j \in \mathcal{M}$, $j \in \mathbb{N}$, dan is $E = \cup_{j=1}^\infty F_j$ met $F_j \in \mathcal{M}$, $j \in \mathbb{N}$ en de F_j zijn paarsgewijs disjunct.*