Periode drie impliceert chaos

Binnen de analyse is het maken van voorspellende modellen een belangrijk doel. Gegeven een aantal beginvoorwaarden en een aantal vergelijkingen voor een systeem, is het vaak mogelijk om het gedrag van dit systeem op lange termijn te voorspellen. Differentiaalvergelijkingen zijn een belangrijk voorbeeld hiervan.

Voor toepassingen is het vaak belangrijk om te weten wat er gebeurt als de beginvoorwaarden een klein beetje veranderen. Geeft dit hetzelfde gedrag op lange termijn, of zal het systeem er op de lange termijn totaal anders uitzien? Een voorbeeld van een toepassing waarin het langetermijngedrag sterk varieert als de begincondities zelfs maar een beetje verschillen is het weer. Hierdoor is het niet mogelijk om het weer op lange termijn te voorspellen.

Een simpel model is het volgende: Gegeven een toestand op tijdstip $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, zeg x_n, is de toestand op tijdstip $n+1$ gegeven door een vaste functie, zeg $x_{n+1} = F(x_n)$. Het systeem is nu volledig bepaald door de functie F en de beginvoorwaarde x_0.

Het blijkt dat zelfs in dit simpele model verrassend complexe processen kunnen plaatsvinden. Er geldt bijvoorbeeld voor een interval $J \subseteq \mathbb{R}$ en een functie $F : J \to J$ het volgende:

Stelling 1. *Als er $a \in J$ bestaat zodanig dat $F^3(a) \leq a < F(a) < F^2(a)$ of $F^3(a) \geq a > F(a) > F^2(a)$, dan gedraagt het systeem zich op lange termijn chaotisch in de volgende zin:*

- *Er is voor iedere $n \in \mathbb{Z}_{>0}$ een periodiek punt $a_n \in J$ met periode n, ofwel er is $a_n \in J$ zodanig dat $F^n(a_n) = a_n$ en $F^k(a_n) \neq a_n$ voor iedere $k \in \{1, 2, \ldots, n-1\}$.*
- *Er is een overaftelbare deelverzameling $S \subset J$ die geen periodieke punten bevat zodanig dat voor iedere $p, q \in S$ met $p \neq q$ en voor ieder periodiek punt $r \in J$ geldt:*

$$\limsup_{n\to\infty} |F^n(p) - F^n(q)| > 0$$

$$\liminf_{n\to\infty} |F^n(p) - F^n(q)| = 0$$

$$\limsup_{n\to\infty} |F^n(p) - F^n(r)| > 0$$

Ruw gezegd betekent het tweede deel dat er een overaftelbare verzameling $S \subset J$ is waarvan geen enkel punt op lange termijn een periodiek punt benadert en verder dat voor ieder tweetal punten in S, ongeacht hoe dicht ze bij elkaar zitten, geldt dat er zowel tijdstippen zullen zijn waarop hun beelden relatief ver van elkaar af zitten als tijdstippen waarop ze zeer dicht bij elkaar zitten. Ofwel, zelfs als de beginvoorwaarden slechts een heel klein beetje verschillen, is het gedrag van het systeem op lange termijn niet vergelijkbaar.

Het is tijdens een voordracht over dit onderwerp hopelijk mogelijk om bovenstaande stelling te bewijzen. Mogelijk zou een voorbeeld gegeven kunnen worden van een simpele functie waar deze stelling op van toepassing is.