TOEPASSINGEN VAN DE STELLING VAN EULER

1. Inleiding

De stelling van Euler (die van $n - m + r = 2$) kent een aantal verrassende en bijzonder fraaie toepassingen. In het bijgevoegde document staan er drie beschreven, maar de eerste twee zijn te bundelen, omdat ze in wezen op hetzelfde fundamentele idee berusten. Dit leidt tot twee bijzonder fraaie onderwerpen voor LPC:

(1) De stelling van Sylvester-Gallai en monochromatische lijnen,
(2) De stelling van Pick.

2. De stelling van Sylvester-Gallai en monochromatische lijnen

Stelling 1 (Sylvester-Gallai)**.** *Zij gegeven een verzameling L van $n > 2$ punten in het platte vlak, niet allemaal op één lijn. Dan bestaat er een lijn die exact 2 punten van L bevat.*

Van deze stelling bestaat een bewijs dat neerkomt op lokaal prutsen met driehoekjes, maar uitblinken in schoonheid doet dat bewijs niet. Door echter een bijzonder fraaie 'lift' te maken naar een boloppervlak, laat de situatie zich vertalen naar een vlakke graaf. Euler blijkt daar de sleutel te leveren voor de oplossing!

Met een vergelijkbare techniek is een gekleurd vriendje van bovenstaande stelling te bewijzen:

Stelling 2. *Laat gegeven zijn een verzameling L met $n > 2$ punten in het platte vlak, niet allemaal op één lijn. Voorzie deze verzameling van een 2-kleuring, d.w.z. kleur ieder punt zwart of wit. Dan bestaat er een lijn die exact 2 punten van L bevat z.d.d. deze twee punten dezelfde kleur hebben.*

3. De stelling van Pick

Beschouw in het platte vlak het raster van gehele punten (beide coördinaten geheel). Beschouw een polygoon P met hoekpunten in dat raster. Zij n_b het aantal rasterpunten dat echt *binnen* het polygoon ligt en n_r het aantal punten dat *op* de rand ligt (inclusief de hoekpunten zelf dus). De stelling van Pick doet een uitspraak over de oppervlakkte Opp_P van het polygoon:

$$Opp_P = n_r + \frac{1}{2}n_r - 1.$$

Je kunt een gemakkelijke situatie visualiseren en zién dat de stelling best wel natuurlijk klinkt. Beschouw bijvoorbeeld als polynoom een rechthoek met horizontale en vertikale zijden. Door nu rond ieder rasterpunt het middelpunt te laten zijn van een vierkantje met zijden 1, zie je dat ieder inwendig punt een bijdrage 1 levert en ieder randpunt bijdrage $\frac{1}{2}$.

In de hoeken gaat dan echter iets mis: zij leveren slechts een kwart op. Vandaar dat er nog 1 af moet ...

Ook deze opmerkelijke gelijkheid is via een eenvoudig lemma over *elementaire driehoekjes* een bijzonder fraai gevolg van de stelling van Euler.