De stelling van Ryser

Arjen Stolk, 9 november 2009

Definitie. Zij S een eindige deelverzameling van $\mathbb{Z}^2$ en n een geheel getal. Dan is de n-de *rijsom* van S gedefinieerd als

$$r_n(S) = \#\{(x, y) \in S : y = n\}$$

en de n-de *kolomsom* als

$$k_n(S) = \#\{(x, y) \in S : x = n\}.$$

Definitie. Twee eindige deelverzamelingen S en T van $\mathbb{Z}^2$ heten *tomografisch equivalent* wanneer voor alle $n \in \mathbb{Z}$ geldt $r_n(S) = r_n(T)$ en $k_n(S) = k_n(T)$.

Een eenvoudig voorbeeld van tomografisch equivalente deelverzamelingen S en T zijn deelverzamelingen die als volgt van elkaar verschillen. Er zijn $x_0, x_1, y_0, y_1 \in \mathbb{Z}$ zodat geldt

$$\begin{aligned} S \setminus T &= \{(x_0, y_0), (x_1, y_1)\} \\ T \setminus S &= \{(x_0, y_1), (x_1, y_0)\}. \end{aligned}$$

We zeggen dat dergelijke deelverzamelingen een 4-*verwisseling* van elkaar verschillen.

Stelling. (Ryser, 1957) *Laat S en T eindige deelverzamelingen van $\mathbb{Z}^2$ zijn. Dan zijn S en T tomografisch equivalent dan en slechts dan als er een eindig aantal 4-verwisselingen is dat S in T omzet.*

Merk op dat één implicatie direct duidelijk is. Een 4-verwisseling verandert de rij- en kolomsommen niet, dus als S en T door 4-verwisselingen in elkaar om te zetten zijn, dan zijn ze tomografisch equivalent. Voor het bewijs van de andere implicatie voeren we eerst wat extra theorie in.

Definitie. Laat S en T eindige deelverzamelingen van $\mathbb{Z}^2$ zijn. Dan is de *afstand* tussen S en T gedefinieerd als

$$d(S, T) = \#(S \setminus T) + \#(T \setminus S).$$

Lemma 1. *Stel $S, T \subset \mathbb{Z}^2$ zijn eindig en tomografisch equivalent. Als geldt $1 \leq d(S, T) \leq 4$, dan verschillen S en T een 4-verwisseling van elkaar.*

Bewijs. Stel $S, T \subset \mathbb{Z}^2$ zijn eindig en tomografisch equivalent, en er geldt dat $1 \leq d(S, T) \leq 4$. Zonder verlies van algemeenheid is er dan een punt $(x_0, y_0) \in S \setminus T$. Omdat $r_{y_0}(S) = r_{y_0}(T)$ geldt, moet er een $x_1 \neq x_0$ zijn zodat $(x_1, y_0) \in T \setminus S$. Omwille van de gelijkheid van kolomsommen moeten er ook $(x_0, y_1) \in T \setminus S$ en $(x_1, y_2) \in S \setminus T$ zijn. We zien dus $d(S, T) \geq 4$ en zelfs $d(S, T) = 4$. Omwille van de gelijkheid van rijsommen moet bovendien gelden dat $y_1 = y_2$, en dus verschillen S en T een 4-verwisseling, zoals gewenst. □

Definitie. Laat $S, T \subset \mathbb{Z}^2$ eindig zijn. Dan is de *verschilfunctie* van S en T gedefinieerd als

$$\begin{aligned} \delta_{S,T} : \mathbb{Z}^2 &\longrightarrow \{-1, 0, 1\} \\ p &\mapsto \begin{cases} 1 & \text{als } p \in S \setminus T \\ -1 & \text{als } p \in T \setminus S \\ 0 & \text{anders.} \end{cases} \end{aligned}$$

Definitie. Laat $S, T \subset \mathbb{Z}^2$ eindig zijn. Een *verschilketen* van lengte n voor S en T is een rij

$$(x_0, y_0), \ldots, (x_{n-1}, y_{n-1})$$

in $\mathbb{Z}^2$ zodat

1. alle punten (x_i, y_i) verschillend zijn;
2. voor $0 \leq i < n - 1$ geldt $y_{i+1} = y_i$ als i even en $x_{i+1} = x_i$ als i oneven is;
3. er geldt $\delta_{S,T}(x_0, y_0) \neq 0$ en voor $0 \leq i < n - 1$ geldt $\delta_{S,T}(x_i, y_i) = -\delta_{S,T}(x_{i+1}, y_{i+1})$.

Een verschilketen heet *gesloten* indien n even is en $x_{n-1} = x_0$ geldt.

Lemma 2. *Stel $S, T \subset \mathbb{Z}^2$ zijn eindig, verschillend en tomografisch equivalent. Dan is er een gesloten verschilketen van lengte minstens 4 voor S en T.*

Bewijs. Merk op dat alle verschilketens lengte hoogstens $d(S, T)$ hebben, aangezien S en T van elkaar verschillen in elk van de punten van zo'n keten. Omdat S en T van elkaar verschillen, is er een punt (x_0, y_0) met

$\delta_{S,T}(x_0, y_0) \neq 0$. Zo'n punt vormt een verschilketen van lengte 1, dus er bestaan verschilketens van positieve lengte. Dus er is een verschilketen

$$(x_0, y_0), \ldots, (x_{n-1}, y_{n-1})$$

van maximale lengte. We laten zien dat deze keten gesloten is.

Stel de keten is niet gesloten. Indien n oneven is, bekijken we de verzamelingen

$$A = \{(x, y_{n-1}) : \delta_{S,T}(x, y_{n-1}) = 1\}$$

en

$$B = \{(x, y_{n-1}) : \delta_{S,T}(x, y_{n-1}) = -1\}$$

Omdat de y_{n-1}-de rijsom van S en T gelijk is, zijn A en B even groot. De punten in $(x_0, y_0), \ldots, (x_{n-2}, y_{n-2})$ die op de rij met y-coördinaat y_{n-1} liggen komen in paren (omwille van eis 2 van de definitie) waarvan er telkens precies één in A zit en precies één in B (omwille van eis 3). Dientengevolge is er een punt (x_n, y_n) met $y_n = y_{n-1}$ dat ongelijk is aan alle voorgaande (x_i, y_i) en dat precies in de andere verzameling zit als (x_{n-1}, y_{n-1}). Dit betekent dat we de keten langer kunnen maken met het punt (x_n, y_n), wat in tegenspraak is met de maximaliteit van de originele keten. Indien n even is en $x_0 \neq x_{n-1}$ geldt, kunnen we een soortgelijk argument toepassen op de kolom met $x = x_{n-1}$.

Merk tot slot op dat een gesloten verschilketen van positieve lengte een lengte heeft die even is, en dat het niet mogelijk is dat zo'n keten lengte 2 heeft. $\square$

Lemma 3. *Stel $S, T \subset \mathbb{Z}^2$ zijn eindig, tomografisch equivalent en verschillend. Dan is er een $U \subset \mathbb{Z}^2$ zodat ofwel geldt dat S en U een 4-verwisseling verschillen en $d(U,T) < d(S,T)$ ofwel dat T en U een 4-verwisseling verschillen en $d(S,U) < d(S,T)$.*

Bewijs. Lemma 2 laat zien dat er gesloten verschilketens met lengte minstens 4 bestaan. Laat

$$(x_0, y_0), \ldots, (x_{n-1}, y_{n-1})$$

zo'n keten zijn met minimale lengte. Zonder verlies van algemeenheid kunnen we aannemen dat $\delta_{S,T}(x_0, y_0) = 1$

Merk op dat $(x_1, y_1) = (x_2, y_0)$, dus de eerste drie punten van de keten vormen drie hoekpunten van een rechthoek. We bekijken het vierde hoekpunt, (x_0, y_2). Indien er geldt dat $\delta_{S,T}(x_0, y_2) = 1$, dan is

$$(x_0, y_2), (x_3, y_3), \ldots, (x_{n-1}, y_{n-1})$$

een gesloten verschilketen van lengte $n-2$, hetgeen de minimaliteit van de originele keten tegenspreekt. Uit de definite van $\delta_{S,T}$ volgt nu dat ofwel $(x_0, y_2) \notin S$, ofwel $(x_0, y_2) \in T$.

Indien $(x_0, y_2) \notin S$ nemen we

$$U = (S \setminus \{(x_0, y_0), (x_2, y_2)\}) \cup \{(x_0, y_2), (x_2, y_0)\}$$

en indien $(x_0, y_2) \in T$ nemen we

$$U = (T \setminus \{(x_0, y_2), (x_2, y_0)\}) \cup \{(x_0, y_0), (x_2, y_2)\}.$$

Het is eenvoudig in te zien dat U op deze manier gedefinieerd aan de voorwaarden van het lemma voldoet. $\square$

Gevolg. *Stel $S, T \subset \mathbb{Z}^2$ zijn eindig en tomografisch equivalent. Dan is er een eindig aantal 4-verwisselingen dat S in T omzet.*

Bewijs. We bewijzen dit met inductie naar $d(S,T)$. Indien $d(S,T) \leq 4$ zijn we klaar omwille van Lemma 1. Indien $d(S,T) > 4$ kunnen we Lemma 3 toepassen. Omwille van de inductiehypothese weten we dat er een eindig aantal 4-verwisselingen is dat S in U omzet en een eindig aantal dat U in T omzet. $\square$

Bronnen

1. G.T. Herman, A. Kuba, *Discrete Tomography: Foundations, Algorithms, and Aplications* (Birkhäuser, Boston), 1999

2. T. Yung Kong, G.T. Herman, "Tomographic Equivalence and Switching Operations", hoofdstuk 3 in [1]

3. H.J. Ryser, "Combinatorial properties of matrices of zeros and ones", *Canadian Journal of Mathematics* **9**, 317–377 (1957)