De stelling van Ryser

Tomografie is de tak van de wiskunde die zich bezig houdt met de reconstructie van een (meestal twee- of driedimensionaal) object als (een deelverzameling van) de projecties van het object bekend zijn. Voorbeelden zijn het maken van lichaamsscans met behulp van röntgenstraling en het bepalen van de structuur van bepaalde kristallen. Hierbij gebeurt ruwweg het volgende: Het object wordt beschenen met licht, en aan de hand van de hoeveelheid van het licht die geabsorbeerd wordt, is te bepalen wat de 'dikte' van het object is ten opzichte van een bepaald vlak of een bepaalde lijn. Gegeven al deze diktes wordt een beeld van het object gevormd.

In de discrete tomografie zijn vaak niet alle projecties bekend, en is een volledige reconstructie van het object niet altijd mogelijk. Zij $S \subset \mathbb{Z}^2$ een eindige deelverzameling. Dan is $r_n(S) := \#\{(x, y) \in S : y = n\}$ respectievelijk $k_n(S) := \#\{(x, y) \in S : x = n\}$ de n-de rijsom respectievelijk de n-de kolomsom van S.

Stel S en T zijn eindige deelverzamelingen van $\mathbb{Z}^2$. Dan zeggen we dat S en T een 4-verwisseling van elkaar verschillen indien er $x_0, x_1, y_0, y_1 \in \mathbb{Z}$ bestaan zodanig dat $S \setminus T = \{(x_0, y_0), (x_1, y_1)\}$ en $T \setminus S = \{(x_0, y_1), (x_1, y_0)\}$.

Twee eindige deelverzamelingen S en T van $\mathbb{Z}^2$ heten tomografisch equivalent als voor alle $n \in \mathbb{Z}$ geldt dat $r_n(S) = r_n(T)$ en $k_n(S) = k_n(T)$. In informelere zin zijn S en T tomografisch equivalent als ze niet onderscheiden kunnen worden van elkaar gegeven de 'dikte' van de projecties op de x- en y-as.

De stelling van Ryser zegt nu dat twee eindige deelverzamelingen S en T van $\mathbb{Z}^2$ tomografisch equivalent zijn dan en slechts dan als ze een eindig aantal 4-verwisselingen van elkaar verschillen.

Ofwel, gegeven de rij- en kolomsommen van een eindige deelverzameling S van $\mathbb{Z}^2$ is het wellicht niet mogelijk om S volledig te reconstrueren, maar toch kan er nog best iets gezegd worden over de structuur van S. Het bewijs van de stelling van Ryser is niet zeer ingewikkeld, en is waarschijnlijk goed geschikt voor een voordracht.