

De vergelijking van Pell

Een Diophantische vergelijking is een polynomiale vergelijking met de eis dat zowel de coëfficiënten van de vergelijking als de onbekenden gehele getallen zijn. Bijvoorbeeld, voor $n \in \mathbb{Z}_{>0}$ is de vergelijking $x^n + y^n = z^n$, waarbij $x, y, z \in \mathbb{Z}$, een Diophantische vergelijking. Het is pas recentelijk bewezen dat deze vergelijking voor $n > 2$ slechts een eindig aantal (triviale) oplossingen heeft zoals $1^n + 0^n = 1^n$, $0^n + 1^n = 1^n$ en $(-1)^n + 0^n = (-1)^n$.

Een Diophantische vergelijking waarvoor in het algemeen veel meer oplossingen bestaan, is de vergelijking van Pell. Deze is gegeven door $y^2 - Dx^2 = 1$, waarbij $D \in \mathbb{Z}$.

Het is aan te tonen dat, mits D positief is en geen kwadraat is in \mathbb{Z} , er oneindig veel geheeltallige oplossingen bestaan. Verder blijken deze oplossingen ook een mooie structuur te hebben; zodra een 'kleinste' niet-triviale oplossing is gevonden, is het mogelijk alle oplossingen van de vergelijking te genereren. Het vinden van deze oplossingen door domweg proberen is niet goed mogelijk; bijvoorbeeld voor $D = 1141$ is de oplossing

$$(x, y) = (30693385322765657197397208, 1036782394157223963237125215)$$

de oplossing met de kleinste waarde voor $|x|$ (afgezien van de triviale oplossingen).

De reden dat we deze oplossingen alsnog snel kunnen vinden ligt in de getaltheorie. Het is niet mogelijk om deze reden binnen redelijke tijd te bespreken tijdens een voordracht. Wel is het goed mogelijk om te bewijzen dat de vergelijking van Pell oneindig veel oplossingen heeft voor iedere $D \in \mathbb{Z}_{>0}$ die geen kwadraat is. Verder kan de structuur van de oplossingen verder worden toegelicht.