p-adische getallen

De meest bekende norm op $\mathbb{Q}$ is de gebruikelijke absolute waarde, gegeven door $|x| = x$ als $x \geq 0$ en $|x| = -x$ als $x < 0$. Dit is echter niet de enige norm op $\mathbb{Q}$. Zij p een priemgetal. Zij $x \in \mathbb{Q}^*$. Dan zijn er $u, v, k \in \mathbb{Z}$ met $p \nmid uv$ zodanig dat x te schrijven is als $\frac{u}{v}p^k$. Merk op dat deze k uniek bepaald is door x. We definiëren nu $|x|_p = p^{-k}$. Verder definiëren we $|0|_p = 0$.

Het blijkt dat $|\cdot|_p$ een norm definieert op Q, de zogeheten p-adische norm. Voor ieder priemgetal p voldoet $|\cdot|_p$ niet alleen aan de driehoeksongelijkheid, maar ook aan de sterkere ongelijkheid $|x + y|_p \leq \max(|x|_p, |y|_p)$. Een gevolg hiervan is dat een rij getallen $(a_n)_{n \in \mathbb{Z}_{>0}}$ met $a_n \in \mathbb{Q}$ Cauchy is ten opzichte van $|\cdot|_p$ dan en slechts dan als $\lim_{n\to\infty} |a_{n+1} - a_n|_p = 0$. Dit is een resultaat dat niet geldt voor de gewone absolute waarde; een bekend tegenvoorbeeld is het rijtje gedefinieerd door $a_1 = 1$ en $a_n := a_{n-1} + \frac{1}{n}$ voor $n \in \mathbb{Z}_{>1}$.

Evenals met de absolute waarde is het mogelijk om $\mathbb{Q}$ volledig te maken ten opzichte van $|\cdot|_p$ in die zin dat ieder Cauchyrijtje convergeert. Evenals bij de reëele getallen verkrijgen we op deze wijze een lichaam $\mathbb{Q}_p$ dat een uitbreiding is van $\mathbb{Q}$. De elementen van dit lichaam worden p-adische getallen genoemd, en spelen een belangrijke rol binnen de getaltheorie.

Een voordracht over dit onderwerp kan meerdere kanten op gaan. Het is bijvoorbeeld mogelijk om de constructie van de p-adische getallen door te lopen, en te bekijken hoe een p-adisch getal er precies uitziet. Ook is het wellicht mogelijk te bewijzen dat iedere niet-triviale norm op $\mathbb{Q}$ ofwel equivalent is aan de absolute waarde, of aan de p-adische norm voor zeker priemgetal p, wat betekent dat we hiermee alle normen op $\mathbb{Q}$ beschreven hebben (op equivalentie van normen na).